Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS Banque

Mathématiques

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Départ d'un train à très haute vitesse : équation différentielle, étude de fonction et aire (13 questions) **Page 3**

2. Obsolescence programmée des smartphones : probabilités et test d'hypothèse (13 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://bts-banque.fr/assets/annales/bts-banque/E2 - Mathématiques/2018/BTS Banque - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Départ d'un train à très haute vitesse : équation différentielle, étude de fonction et aire

Les ingénieurs étudient la distance parcourue par un wagon propulsé dans un tube à basse pression pour vérifier qu'il peut atteindre 400 km/h en moins de deux minutes. L'exercice mobilise une équation différentielle, l'étude de la vitesse et le calcul de l'aire d'une pièce destinée à une gare.

A. Résolution d'une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l'équation différentielle homogène y' - 0,2y = 0.

On écrit l'équation sous la forme fournie $y' + ay = 0$, avec $a = -0,2$. Les solutions sont donc de la forme $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t}, \quad k \in \mathbb{R}.$

Question 2°. Vérifier que g(t) = -15t - 75 est une solution de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

On dérive g : $g'(t) = -15$. En substituant dans le membre de gauche, on obtient $g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75) = 3t$. Cela correspond bien au second membre de l'équation (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = -15t - 75$ est une solution de (E).

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

Les solutions de l'équation complète s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière de (E) les solutions de l'équation homogène. On ajoute donc $-15t - 75$ à $ke^{0,2t}$, avec k réel arbitraire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75, \quad k \in \mathbb{R}.$

Question 4°. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale f(0) = 0, sachant qu'à t = 0 le wagon est au point de départ.

1. Dans la solution générale, $f(0) = k - 75$.
2. La condition $f(0) = 0$ impose $k = 75$. En remplaçant la constante par cette valeur, on obtient la fonction recherchée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t$.

B. Étude de fonction et application

Question 1° a). À partir de l'expression fournie pour f'(t), résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

La dérivée fournie est $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. Ainsi, $f'(t) \geq 0$ équivaut à $e^{0,2t} \geq 1$, donc à $t \geq 0$. Cette condition est vérifiée sur tout l'intervalle considéré.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 3]$, avec égalité en $t = 0$.

Question 1° b). Déduire de l'étude du signe de f'(t) les variations de f sur l'intervalle [0, 3].

La dérivée est nulle en 0 et strictement positive sur $]0, 3]$. La fonction f est donc croissante sur $[0, 3]$.

t	**0**	**3**
Signe de $f'(t)$	0	+
Variation de f	$f(0) = 0$	$f(3) = 75(e^{0,6} - 1) - 45$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f croît de 0 à $75(e^{0,6} - 1) - 45$ sur $[0, 3]$.

Question 2°. Déterminer le nombre de kilomètres parcourus par le wagon au bout d'une minute, puis arrondir le résultat au dixième.

À une minute, la distance parcourue vaut $f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15 \approx 1,6052$ km. L'arrondi au dixième donne donc $1,6$ km.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$1,6$ km

Question 3° a). La vitesse du wagon à l'instant t, en kilomètres par minute, correspond à f'(t). Déterminer la vitesse à t = 2 minutes et arrondir au dixième.

La vitesse est donnée par $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. À deux minutes, $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1) \approx 7,3774$ km/min, soit $7,4$ km/min au dixième près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$7,4$ km/min

Question 3° b). Déterminer si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse.

Le seuil correspondant à 400 km/h est $400/60 \approx 6,667$ km/min. En résolvant $15(e^{0,2t}-1) = 400/60$, on trouve $t = 5\ln(13/9) \approx 1,839$ minute. Ce temps est inférieur à deux minutes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui, l'objectif est atteint après environ $1,84$ minute.

Question 4°. Choisir, parmi les trois propositions, une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 2. Recopier la réponse choisie sans justification.

La tangente en $t = 2$ s'écrit $y = f'(2)(t-2) + f(2)$. En utilisant les expressions de $f'(2)$ et de $f(2)$, on retrouve la troisième proposition.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y = 15(e^{0,4}-1)t + 45e^{0,4} - 75.$

C. Calcul intégral

Question 1°. Choisir parmi les trois propositions la valeur de l'aire A1 du rectangle OPQR, en unités d'aire.

Le rectangle OPQR a une largeur de 3 unités et une hauteur de $2,25$ unités, d'après le repère et l'équation du bord supérieur. Son aire est donc $3 \times 2,25 = 6,75$ unités d'aire.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A_1 = 6,75$ u. a.

Question 2°. À l'aide de la primitive fournie, calculer l'aire A2 de la partie du plan limitée par la courbe représentative de g, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 3.

La fonction g est positive sur $[0,3]$, donc l'aire cherchée est son intégrale. Avec la primitive fournie, on obtient $A_2 = \left[\frac{27}{4}\ln(x^2+9)\right]_0^3 = \frac{27}{4}\ln\left(\frac{18}{9}\right) = \frac{27}{4}\ln 2$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ u. a.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'aire hachurée A, en unités d'aire, puis arrondir le résultat au millième.

La pièce est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. L'aire hachurée est donc deux fois l'aire du rectangle OPQR moins l'aire sous la courbe à droite : $A = 2(A_1 - A_2) = 2\left(6,75 - \frac{27}{4}\ln 2\right) = 13,5(1 - \ln 2)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A \approx 4,143$ u. a.

2. Obsolescence programmée des smartphones : probabilités et test d'hypothèse

L'exercice étudie l'obsolescence technique et logicielle d'une population de smartphones, puis le nombre de modèles non réparables dans un lot prélevé au service après-vente. Il se termine par un test bilatéral portant sur une affirmation concernant la marque B.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À partir des données de l'énoncé sur 200 smartphones, recopier et compléter le tableau d'effectifs croisant l'obsolescence technique et l'obsolescence logicielle.

Smartphones	Touchés par L	Non touchés par L	Total
Touchés par T	2	4	6
Non touchés par T	14	180	194
Total	16	184	200

Les effectifs touchés par T et par L sont respectivement 3 % et 8 % de 200. Parmi les 16 smartphones touchés par L, 12,5 % sont aussi touchés par T, soit 2 smartphones. On complète ensuite chaque ligne et chaque colonne à partir de leurs totaux. Les effectifs du tableau totalisent bien 200 smartphones.

Tableau d'effectifs complété

Smartphones	touchés par l'obsolescence logicielle	non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

✓ RÉPONSE À RETENIR

Effectifs : 2, 4, 6 ; 14, 180, 194 ; puis 16, 184 et 200 au total.

Question 2°. Pour les événements T, « le smartphone prélevé est touché par l'obsolescence technique », et L, « le smartphone prélevé est touché par l'obsolescence logicielle », donner P(T), P(L) et P_L(T), la probabilité de T sachant L.

Les proportions données dans l'énoncé sont directement les probabilités marginales : 3 % pour l'obsolescence technique et 8 % pour l'obsolescence logicielle. La probabilité conditionnelle est aussi fournie : parmi les smartphones touchés par L, 12,5 % sont touchés par T. Il suffit de convertir chacune de ces proportions en

écriture décimale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> P(T) = 0,03 ; P(L) = 0,08 ; la probabilité de T sachant L vaut 0,125.

Question 3° a). Calculer la probabilité P(T ∩ L), que le smartphone soit touché par les deux types d'obsolescence.

La probabilité conditionnelle fournie dans l'énoncé relie l'intersection à l'événement L : **$P(T \cap L) = P(L) \times P_L(T)$**. On remplace par les données, soit 0,08 et 0,125. Le produit donne la proportion de smartphones touchés simultanément par les deux types d'obsolescence.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'un smartphone soit touché par les deux obsolescences est P(T ∩ L) = 0,01.

Question 3° b). Calculer la probabilité P(T ∪ L), que le smartphone soit touché par au moins l'un des deux types d'obsolescence.

Être touché par au moins l'un des deux types d'obsolescence correspond à l'union des événements T et L. En additionnant leurs probabilités, l'intersection est comptée deux fois : il faut donc la soustraire une fois. On applique la formule **$P(T \cup L) = P(T) + P(L) - P(T \cap L)$**, avec les valeurs établies précédemment.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'un smartphone soit touché par au moins l'une des deux obsolescences est P(T ∪ L) = 0,10.

Question 3° c). Calculer P_T(L), la probabilité qu'un smartphone soit touché par l'obsolescence logicielle sachant qu'il est touché par l'obsolescence technique.

La probabilité de L sachant T est le rapport entre la probabilité de l'intersection et celle de T. On utilise donc **$P_T(L) = P(T \cap L) / P(T)$**. Les valeurs obtenues précédemment sont 0,01 et 0,03. Le quotient peut être donné sous forme décimale arrondie au millième, conformément à la consigne de l'exercice.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Parmi les smartphones touchés par T, la probabilité d'être aussi touché par L est $P_T(L) \approx 0,333$.

B. Loi binomiale

Question 1°. Justifier que la variable aléatoire X, qui compte les smartphones non réparables dans un lot de 50, suit une loi binomiale, puis déterminer ses paramètres.

Chaque prélèvement est assimilé à un tirage avec remise : les tirages sont indépendants et la probabilité de non-réparabilité reste constante, égale à 4,5 %. Chaque tirage comporte deux issues, smartphone non réparable ou réparable. La variable X compte les smartphones non réparables parmi 50 tirages : elle suit donc une loi binomiale de paramètres n = 50 et p = 0,045.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> X suit une loi binomiale de paramètres n = 50 et p = 0,045, où X compte les smartphones non réparables.

Question 2°. Calculer la probabilité que, dans un lot de 50 smartphones, tous soient réparables.

Le lot est entièrement réparable exactement lorsque X = 0. À chaque tirage, la probabilité qu'un smartphone soit réparable est 1 - 0,045 = 0,955. Les tirages étant assimilés à des tirages avec remise, ils sont indépendants. La probabilité que les 50 smartphones soient tous réparables est donc le produit de 50 facteurs égaux à 0,955.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité que les 50 smartphones du lot soient réparables est $0{,}955^{50} \approx 0{,}100$.

Question 3° a). Faire tourner à la main l'algorithme pour les valeurs de i allant de 0 à 3, puis recopier et compléter le tableau des valeurs de P(X = i) et de S.

i	0	1	2	3
P(X = i)	0,100	0,236	0,272	0,205
S après l'ajout	0,100	0,336	0,608	0,813

L'algorithme part de S = 0, puis ajoute successivement P(X = 0), P(X = 1), P(X = 2) et P(X = 3). Les probabilités et sommes cumulées du tableau sont arrondies au millième. La valeur de S à chaque étape correspond à la somme obtenue après l'ajout de la probabilité de la colonne.

Tableau de l'algorithme complété

i	0	1	2	3
$P(X = i)$	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

✓ RÉPONSE À RETENIR

Probabilités pour i = 0 à 3 : 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. Sommes successives : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question 3° b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat.

À la fin de la boucle, l'algorithme a additionné les probabilités des quatre valeurs i = 0, 1, 2 et 3. Ainsi, S représente la probabilité qu'un lot compte au plus trois smartphones non réparables, c'est-à-dire P(X ≤ 3). La somme calculée à la dernière étape est arrondie au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

S ≈ 0,813 : environ 81,3 % des lots de 50 smartphones comptent au plus trois smartphones non réparables.

Question 4°. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte du lot de smartphones.

Pour une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance vaut E(X) = np. Ici, on multiplie le nombre de smartphones du lot par la probabilité de non-réparabilité pour un smartphone. Cette espérance est une moyenne théorique : elle décrit le nombre moyen de smartphones non réparables par lot sur un grand nombre de lots.

✓ RÉPONSE À RETENIR

E(X) = 50 × 0,045 = 2,25 : le nombre moyen de smartphones non réparables est de 2,25 par lot.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. Sous l'hypothèse nulle, F suit une loi normale de moyenne 0,55 et d'écart type 0,037. Choisir parmi 0,05, 0,06 et 0,07 la valeur de h telle que P(0,55 - h ≤ F ≤ 0,55 + h) = 0,95, arrondie au centième.

Sous H_0, l'intervalle central de probabilité 0,95 est centré sur la moyenne et s'étend approximativement jusqu'à 1,96 écarts types de chaque côté. On calcule donc h ≈ 1,96 × 0,037 = 0,07252. Arrondie au centième, cette valeur correspond à l'une des propositions données.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La valeur de h arrondie au centième est 0,07.

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 %, pour H0 : p = 0,55 et H1 : p ≠ 0,55.

Pour un test bilatéral au seuil de 5 %, on ne rejette pas H_0 si la fréquence observée appartient à l'intervalle central de probabilité 0,95 sous H_0. Avec h arrondi à 0,07, les bornes sont 0,55 - 0,07 et 0,55 + 0,07. En dehors de cet intervalle, on rejette H_0 au profit de H_1.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter H_0 si $0{,}48 \leq f \leq 0{,}62$; la rejeter si $f < 0{,}48$ ou $f > 0{,}62$.

Question 3°. Dans l'échantillon aléatoire de 180 personnes, 76 pensent que la marque B pratique l'obsolescence programmée. Quelle est la conclusion du test ?

La fréquence observée dans l'échantillon est $f = 76/180 \approx 0{,}422$. Elle est inférieure à la borne basse 0,48 de l'intervalle de décision. La fréquence se trouve donc dans la région de rejet du test bilatéral : au seuil de 5 %, les résultats de l'échantillon ne sont pas compatibles avec l'hypothèse p = 0,55.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> On rejette H_0 au seuil de 5 % : la fréquence observée est inférieure à 0,48.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, Session 2018, code MATGRB1, durée 2 heures et coefficient variable selon la spécialité. L'exercice 1 porte sur le départ d'un train à très haute vitesse et l'aire d'une pièce de gare. L'exercice 2 traite de l'obsolescence des smartphones par probabilités conditionnelles, loi binomiale et test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' - ay = b(t), une solution générale est la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène.
- La vitesse instantanée est la dérivée de la distance : si f est en km et t en minutes, f'(t) s'exprime en km/min.
- Si X suit la loi binomiale B(n,p), alors P(X=i) = C(n,i)p^i(1-p)^(n-i) et E(X) = np.
- P(T ∩ L) = P(L)P_L(T) et P(T ∪ L) = P(T) + P(L) - P(T ∩ L).

Points de vigilance & attentes du jury

- Pour comparer la vitesse à 400 km/h, convertir cette valeur en km/min, unité utilisée pour f'(t).
- Dans le tableau à double entrée, vérifier la cohérence des totaux avec les pourcentages et l'effectif global de 200.
- Pour le test bilatéral, comparer la fréquence observée aux deux bornes de l'intervalle d'acceptation.
- Pour l'aire hachurée, tenir compte de la symétrie de la pièce et distinguer l'aire du rectangle de celle sous la courbe.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment utiliser la solution particulière pour résoudre l'équation différentielle du train ?

Résoudre d'abord l'équation homogène, puis ajouter une solution particulière de l'équation complète. La condition initiale f(0) = 0 détermine la constante de la solution générale sur l'intervalle étudié.

Q : Comment calculer la probabilité conditionnelle à partir du tableau des smartphones ?

La probabilité de T sachant L est P_L(T) = P(T ∩ L) / P(L), si P(L) est non nulle. Avec des effectifs, on divise l'effectif commun aux deux événements par l'effectif correspondant à L.

Q : Comment interpréter la somme calculée par l'algorithme de la loi binomiale ?

L'algorithme additionne P(X = 0), P(X = 1), P(X = 2) et P(X = 3). Sa valeur finale représente donc la probabilité qu'un lot contienne au plus trois smartphones non réparables.

Q : Qu'attend-on pour justifier la conclusion du test d'hypothèse ?

Calculer la fréquence observée parmi les 180 personnes, puis la comparer aux bornes de l'intervalle de décision au seuil de 5 %. Indiquer ensuite clairement si l'hypothèse nulle est rejetée ou non.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts-banque.fr/assets/annales/bts-banque/E2 - Mathématiques/2018/BTS Banque - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Banque : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.