Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS Banque

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour toutes les spécialités sauf Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Contrôle de conformité et durée de vie de produits industriels (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 13**

Sujet officiel (PDF) : https://bts-banque.fr/assets/annales/bts-banque/E2 - Mathématiques/2022/BTS Banque - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m·s⁻¹ est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction exponentielle. L'exercice porte sur une équation différentielle, l'étude de la fonction vitesse, la distance parcourue, un développement limité et la tangente à la courbe.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,8y = 0.

La formule fournie dans le sujet s'applique à une équation homogène de la forme $y' + ay = 0$: ses solutions sont $y(t) = Ce^{-at}$, où C est une constante réelle. Ici, le coefficient est $a = 0{,}8$. On remplace donc a par cette valeur. Comme l'équation est étudiée sur $[0; +\infty[$, les solutions obtenues sont définies sur cet intervalle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}8t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. La fonction g est définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

Pour vérifier que g est solution, on calcule sa dérivée et on la substitue dans l'équation. La fonction $g(t) = 5$ est constante, donc sa dérivée est nulle. Le membre de gauche devient alors :

1. $g'(t) = 0$.
2. $g'(t) + 0{,}8g(t) = 0 + 0{,}8 \times 5 = 4$.

On obtient bien le second membre de l'équation, pour tout $t \geq 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est solution de (E).

Question 1. c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La solution générale de l'équation homogène associée est $y_h(t) = Ce^{-0{,}8t}$, d'après la question 1.a. La question 1.b établit que la fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de l'équation complète. Toute solution de cette équation s'obtient en ajoutant à cette solution particulière une solution de l'équation homogène. On rassemble ainsi les solutions dans une expression dépendant de la constante réelle C.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}8t} + 5$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. **Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

On part de la solution générale trouvée à la question précédente. Pour imposer la condition initiale, on remplace t par 0 dans $f(t) = Ce^{-0,8t} + 5$. Comme $e^0 = 1$, cela donne $C + 5 = 20$. On en déduit $C = 20 - 5 = 15$. En remplaçant la constante dans la solution générale, on obtient la fonction recherchée, définie sur $[0; +\infty[$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. **Pour f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, démontrer que sa limite lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.**

On étudie séparément le terme exponentiel dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers $+\infty$, le produit $-0,8t$ tend vers $-\infty$. Or l'exponentielle d'une quantité qui tend vers $-\infty$ tend vers 0. Ainsi, $15e^{-0,8t}$ tend vers 0, tandis que le terme constant reste égal à 5. La limite de la somme est donc 5.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. **Déduire de la limite de f en +∞ que la courbe C admet une asymptote, et donner une équation de cette asymptote.**

Une courbe représentant une fonction qui tend vers une limite finie en $+\infty$ admet une asymptote horizontale. La hauteur de cette droite est égale à la limite de la fonction. Ici, la limite obtenue à la question précédente vaut 5. La courbe C se rapproche donc de la droite horizontale de hauteur 5 lorsque t augmente sans limite.

> Une asymptote horizontale de C a pour équation $y = 5$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. **En utilisant l'expression donnée f'(t) = −12e$^{-0,8t}$, dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.**

Sur $[0; +\infty[$, l'exponentielle est strictement positive. L'expression admise dans le sujet donne donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$ sur tout l'intervalle : la fonction est strictement décroissante. Elle commence à $f(0) = 20$ et tend vers 5 en $+\infty$.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$		$-$
$f(t)$	20	$\searrow$ 5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Le chariot s'arrêterait si sa vitesse devenait nulle. Or, pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est positive. La vitesse est donc toujours supérieure à 5, même si elle se rapproche de cette valeur. La limite de la vitesse n'étant pas nulle, elle ne s'annule à aucun instant selon le modèle donné.

- La vitesse reste strictement positive.
- Le système de freinage ne permet donc pas l'arrêt du chariot dans ce modèle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : le chariot ne s'arrête pas selon ce modèle.

Question 4. a. La fonction F est définie sur [0 ; +∞[par F(t) = −18,75e$^{-0,8t}$ + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.

On dérive les deux termes de $F(t) = -18{,}75e^{-0,8t} + 5t$. La dérivée de $e^{-0,8t}$ est $-0{,}8e^{-0,8t}$, par la règle de dérivation d'une composée. On obtient ainsi :

1. $F'(t) = (-18{,}75)(-0{,}8)e^{-0,8t} + 5$.
2. Comme $(-18{,}75)(-0{,}8) = 15$, $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$.

Donc F est bien une primitive de f sur l'intervalle considéré.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4. b. La distance parcourue entre les instants t_0 et t_1 est donnée par l'intégrale de f entre ces instants. Calculer la distance exacte parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance sur $[0; 1]$ vaut $F(1) - F(0)$, puisque F est une primitive de f. En substituant les bornes dans l'expression de F, on obtient exactement $(-18{,}75e^{-0,8} + 5) - (-18{,}75) = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0,8}$ mètres. Cette valeur vaut environ $15{,}3251$ m ; l'arrondi au centimètre est donc $15{,}33$ m.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Distance exacte : $23{,}75 - 18{,}75e^{-0{,}8}$ m. Au centimètre près : $15{,}33$ m.

Partie C - Étude locale

Question 1. Parmi les expressions proposées, recopier l'unique développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro qui est exact. Aucune justification n'est demandée ; une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point.

Le document source affiche le polynôme de Taylor $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Parmi les propositions, il faut choisir celle qui reprend ces trois termes et ajoute un reste négligeable devant t^2. La troisième expression écrit ce reste sous la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Les deux autres propositions n'expriment pas le développement limité exact à l'ordre 2.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La troisième proposition : $f(t) = 20 - 12t + 4{,}8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 s'écrit $y = f(0) + f'(0)t$. La condition initiale donne $f(0) = 20$. D'après l'expression de la dérivée fournie dans le sujet, $f'(0) = -12e^0 = -12$. En remplaçant ces deux valeurs dans la formule de la tangente, on obtient une droite passant par le point $(0; 20)$, de pente -12.

Équation de la tangente : $y = 20 - 12t$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y = 20 - 12t$.

2. Contrôle de conformité et durée de vie de produits industriels

Une usine produit des tubes fluorescents dans deux ateliers et effectue des tests pour repérer les tubes défectueux. L'exercice étudie les probabilités conditionnelles, la durée de vie modélisée par une loi exponentielle et l'estimation de la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon.

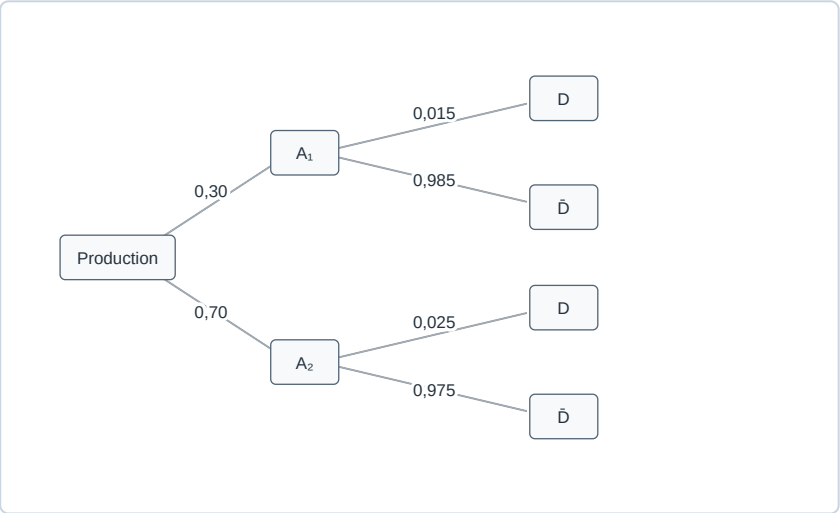
Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. À partir des proportions de production des deux ateliers et de leurs taux de défaut, réaliser un arbre pondéré décrivant la situation.

1. Depuis la production totale, la branche atelier 1 porte la proportion de tubes fabriqués dans cet atelier ; la branche atelier 2 porte celle de l'atelier 2.
2. Depuis chaque atelier, séparer les tubes défectueux des tubes sans défaut. Les probabilités conditionnelles de défaut sont données dans l'énoncé ; celles des branches sans défaut sont leurs compléments à 1.

Chaque paire de branches issues d'un même nœud a une somme égale à 1.

Arbre pondéré de conformité des tubes



Les premières branches donnent les proportions de production, puis les taux conditionnels de défaut.

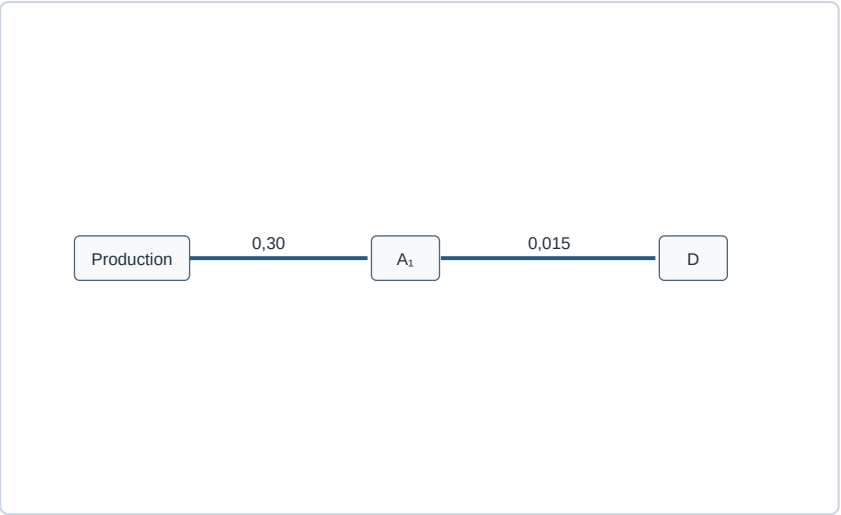
✓ RÉPONSE À RETENIR

A_1 : 0,30 ; A_2 : 0,70. Depuis A_1 : D : 0,015 ; $\bar{D}$: 0,985. Depuis A_2 : D : 0,025 ; $\bar{D}$: 0,975.

Question 2. Calculer la probabilité qu'un tube provienne de l'atelier 1 et présente un défaut, soit $P(A_1 \cap D)$.

Pour obtenir la probabilité qu'un tube provienne de l'atelier 1 et soit défectueux, on multiplie la proportion de tubes issus de cet atelier par la probabilité conditionnelle d'un défaut dans cet atelier. Avec les données du sujet, $P(A_1) = 0{,}30$ et $P(D \mid A_1) = 0{,}015$. Ainsi, $P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P(D \mid A_1) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$.

Chemin correspondant à un tube défectueux de l'atelier 1



La probabilité du chemin complet est le produit des probabilités inscrites sur ses branches.

✓ RÉPONSE À RETENIR

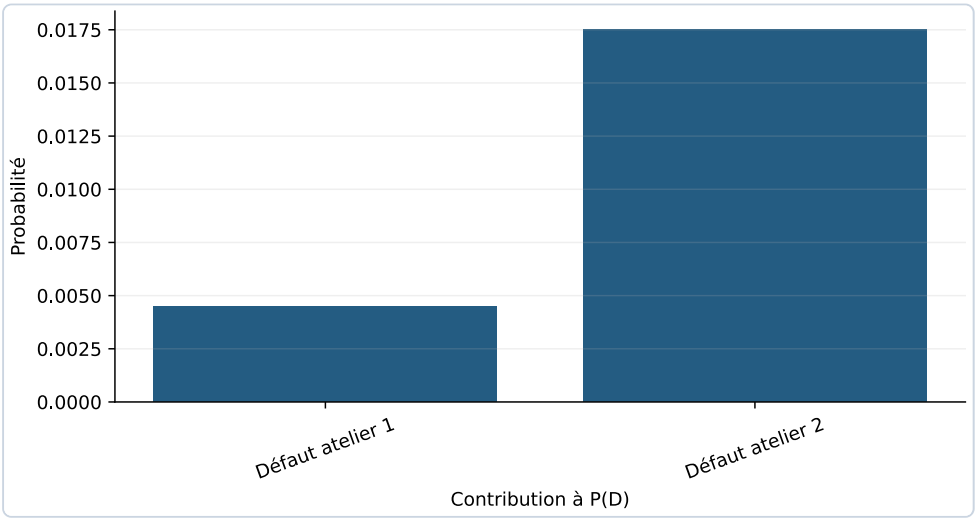
$P(A_1 \cap D) = 0{,}0045$, soit 0,45 %.

Question 3. Calculer la probabilité qu'un tube prélevé au hasard présente un défaut, en utilisant les données des deux ateliers.

Les deux ateliers peuvent produire des tubes défectueux. Comme un tube provient d'un seul atelier, les événements correspondant aux deux ateliers sont incompatibles ; on additionne donc les probabilités des chemins qui aboutissent à un défaut.

Atelier	Calcul	Contribution à $P(D)$
1	$0{,}30 \times 0{,}015$	0,0045
2	$0{,}70 \times 0{,}025$	0,0175

On additionne les deux contributions pour obtenir la probabilité totale d'un défaut.



✓ RÉPONSE À RETENIR

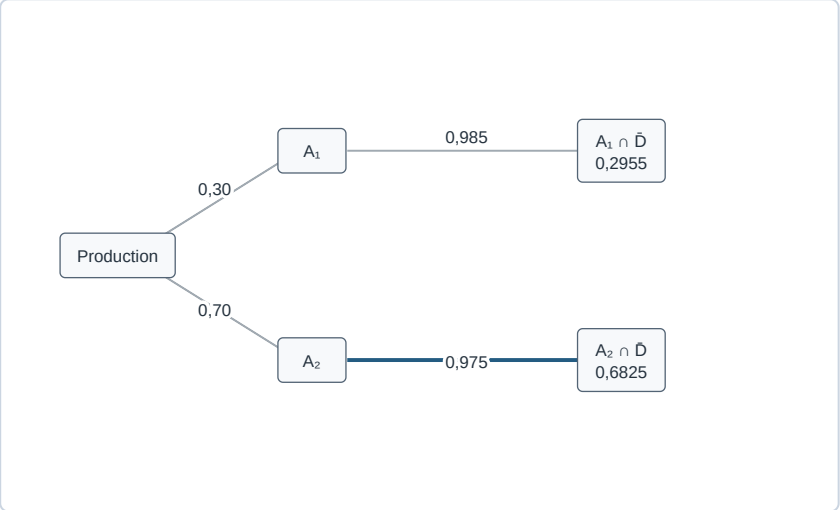
$P(D) = 0{,}022$, soit 2,2 %.

Question 4. Sachant que le tube prélevé ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.

On cherche la proportion de tubes issus de l'atelier 2 parmi les tubes sans défaut. La probabilité du chemin « atelier 2 et sans défaut » vaut $0{,}70 \times 0{,}975 = 0{,}6825$. La probabilité d'un tube sans défaut est le complément de la probabilité d'un défaut trouvée à la question précédente, soit $1 - 0{,}022 = 0{,}978$.

- Numérateur : $P(A_2 \cap \overline{D}) = 0{,}6825$.
- Dénominateur : $P(\overline{D}) = 0{,}978$.
- La probabilité conditionnelle est le quotient de ces deux valeurs.

Chemins sans défaut et probabilité conditionnelle



Le chemin mis en évidence constitue le numérateur ; les deux chemins sans défaut composent le dénominateur.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0{,}698$, soit 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.

Le sujet rappelle que, pour une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance est $E(T) = \frac{1}{\lambda}$. Ici, le paramètre vaut $0{,}001$ par heure. On calcule donc $E(T) = \frac{1}{0{,}001} = 1000$ heures. Cette espérance représente la durée moyenne de bon fonctionnement des tubes sur un grand nombre de produits ; elle ne garantit pas que chaque tube fonctionnera exactement cette durée.

Espérance de la durée de fonctionnement

Paramètre	Formule	Espérance
λ = 0,001	E(T) = 1/λ	1 000 heures

L'espérance est exprimée dans la même unité que la durée T, soit en heures.

✓ RÉPONSE À RETENIR

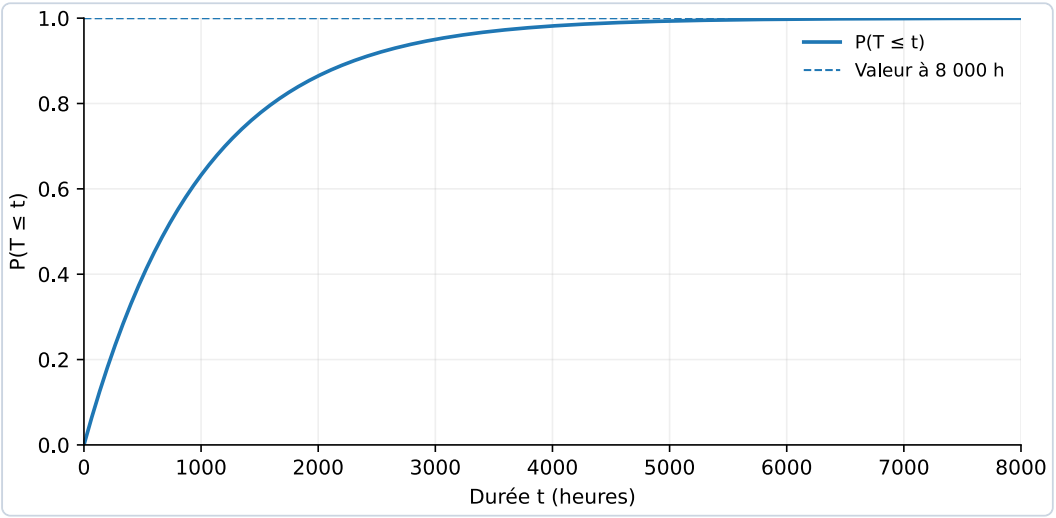
$E(T) = 1000$ heures : durée moyenne de bon fonctionnement.

Question 2. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité qu'un tube fluorescent prélevé au hasard fonctionne moins de 8 000 heures.

1. La formule fournie donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
2. Avec $t = 8000$ heures et $\lambda = 0{,}001$, $P(T < 8000) = 1 - e^{-0{,}001 \times 8000} = 1 - e^{-8}$.
3. La valeur est environ $0{,}9996645$, soit $1{,}00$ au centième près.

Comme la loi exponentielle est continue, remplacer $T < 8000$ par $T \leq 8000$ ne change pas la probabilité.

Probabilité cumulée de bon fonctionnement



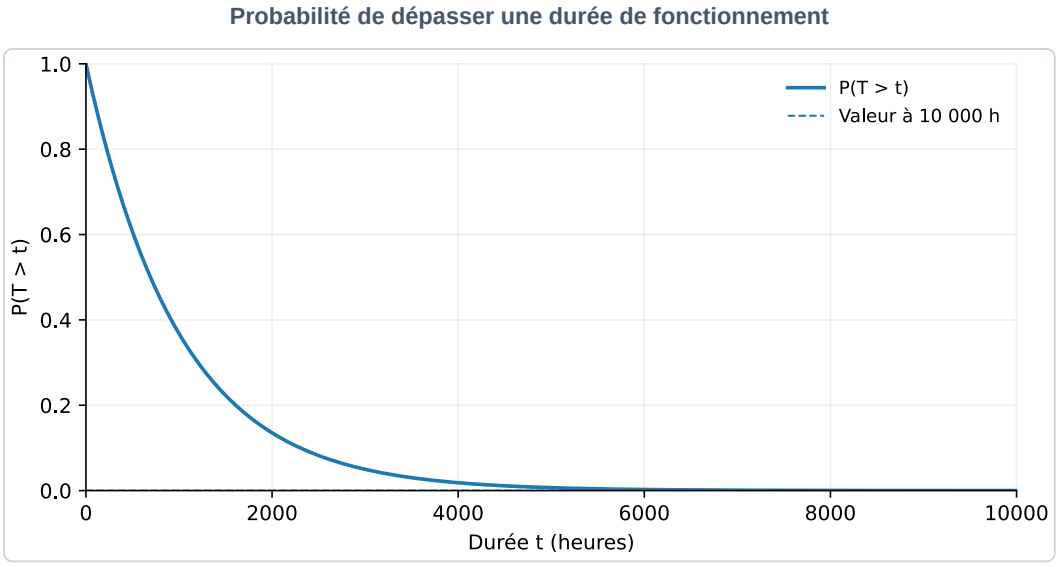
À 8 000 heures, la probabilité recherchée est l'ordonnée de la fonction cumulée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8000) \approx 1{,}00$ au centième près.

Question 3. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité qu'un tube fluorescent prélevé au hasard fonctionne plus de 10 000 heures.

La probabilité de fonctionner plus de t heures est le complément de la probabilité de fonctionner au plus t heures. Ainsi, $P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = e^{-\lambda t}$. Pour $t = 10000$ heures et $\lambda = 0{,}001$, on obtient $P(T > 10000) = e^{-0{,}001 \times 10000} = e^{-10} \approx 0{,}0000454$. Cette valeur s'arrondit à $0{,}00$ au centième près.



La courbe représente la probabilité de survie ; le point à 10 000 heures donne la probabilité demandée.

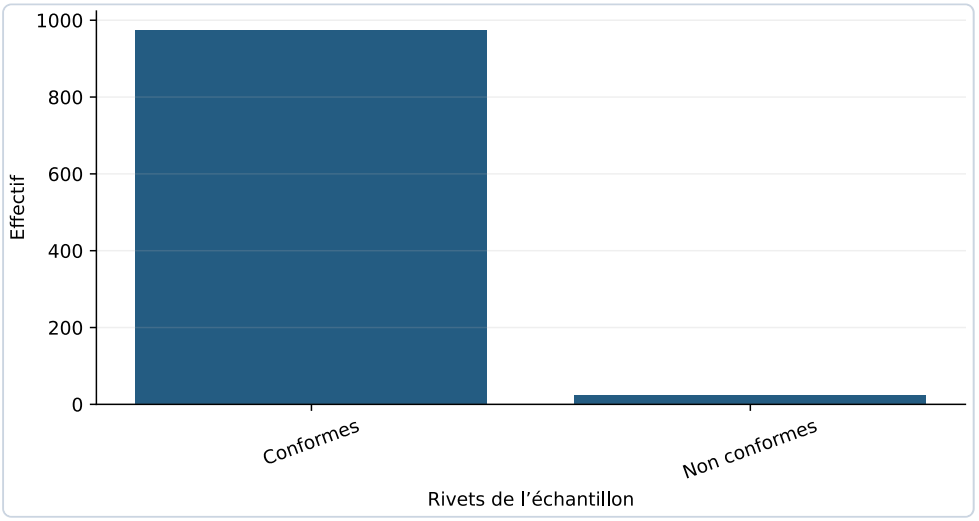
✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10000) \approx 0{,}00$ au centième près.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Dans un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue de rivets conformes est la fréquence observée dans l'échantillon. Sur les 1 000 rivets contrôlés, 975 sont conformes. On obtient donc $\hat{p} = \frac{975}{1000} = 0{,}975$. La fréquence restante correspond aux rivets non conformes : $1000 - 975 = 25$. L'estimation ponctuelle est ainsi une proportion de 0,975, soit 97,5 %.



✓ RÉPONSE À RETENIR

$\hat{p} = 0{,}975$, soit 97,5 %.

Question 2. À partir de la fréquence observée dans l'échantillon, déterminer un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95 %, avec la formule fournie, et arrondir ses bornes à 10^{-3} près.

La fréquence observée est $f = 0{,}975$ et la taille de l'échantillon est $n = 1000$. On applique la formule donnée dans le sujet :

$$\left[f - 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \; ; \; f + 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right]$$

Les bornes calculées sont environ $0{,}965323$ et $0{,}984677$. Elles s'arrondissent au millième à $0{,}965$ et $0{,}985$.

Bornes de l'intervalle de confiance à 95 %

Borne	Valeur avant arrondi	Valeur au millième
Inférieure	0,965323…	0,965
Supérieure	0,984677…	0,985

Calcul avec f = 0,975, n = 1 000 et le coefficient 1,96 indiqué dans le sujet.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0{,}965 \; ; \; 0{,}985]$.

SYNTHÈSE DE L'ÉPREUVE & RÉFÉRENTIEL • BTS BANQUE

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient est 2 pour la plupart des spécialités et 3 en Traitement des matériaux. Deux situations industrielles sont étudiées : le freinage d'un chariot et le contrôle de tubes et de rivets. Les compétences évaluées couvrent équations différentielles, fonctions, probabilités et estimation statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$; une solution particulière permet ensuite d'obtenir les solutions avec second membre.
- Si $f(t)$ tend vers L lorsque t tend vers $+\infty$, la droite d'équation $y = L$ est une asymptote horizontale à la courbe.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $E(T) = 1/\lambda$ et $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
- L'intervalle de confiance à 95 % fourni pour une proportion est $[f - 1{,}96\sqrt{f(1-f)/n} ; f + 1{,}96\sqrt{f(1-f)/n}]$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : vitesse en $m \cdot s^{-1}$, temps de freinage en secondes et durée de vie des tubes en heures.
- Pour $P(A \text{ sachant } B)$, identifier l'événement conditionnant et diviser la probabilité de l'intersection par $P(B)$.
- Dans le calcul d'une distance, intégrer la vitesse entre les bornes demandées et donner une réponse en mètres.
- Pour le développement limité, vérifier les termes jusqu'à l'ordre 2 et la condition imposée à la fonction de reste.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la constante dans la solution de l'équation différentielle du chariot ?

Écrivez la solution générale de l'équation avec second membre, puis utilisez $f(0) = 20$. En remplaçant t par 0, l'exponentielle vaut 1 ; cette condition permet de déterminer la constante.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un tube conforme provienne de l'atelier 2 ?

Calculez $P(A_2 \cap \text{non D})$, puis divisez par $P(\text{non D})$. Dans l'arbre, la probabilité de l'intersection s'obtient en multipliant les probabilités des branches correspondantes.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et leurs parties peuvent être traitées indépendamment. Répartissez le temps entre eux, commencez par les questions accessibles et gardez une marge pour vérifier calculs, unités et arrondis.

Q : Quels arrondis faut-il respecter dans les parties probabilités et estimation ?

Les probabilités de durée de vie sont demandées à 10^{-2} près. Pour l'intervalle de confiance de la partie C, les deux bornes doivent être arrondies à 10^{-3} près.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts-banque.fr/assets/annales/bts-banque/E2 - Mathématiques/2022/BTS Banque - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Banque : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.