Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS Banque

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot : équation différentielle, étude de fonction et développement limité (12 questions) **Page 3**

2. Étude d'un système électrique par transformation de Laplace (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://bts-banque.fr/assets/annales/bts-banque/E2 - Mathématiques/2022/BTS Banque - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot : équation différentielle, étude de fonction et développement limité

Un chariot de fête foraine se déplace initialement à 20 m·s⁻¹ avant d'être ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction f. Les questions mobilisent la résolution d'une équation différentielle, l'étude des variations et de la limite, le calcul d'une distance par intégration, puis un développement limité et une tangente.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.

La formule fournie s'applique à l'équation homogène $y' + ay = 0$, avec $a = 0,8$. Elle donne une famille de solutions exponentielles de la forme $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. En remplaçant a par $0,8$, on obtient les solutions sur tout l'intervalle $[0\,;+\infty[$. Aucune condition initiale n'étant imposée dans cette question, la constante k reste arbitraire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Pour g(t) = 5, vérifier que g est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc sa dérivée est nulle. On évalue alors le membre de gauche de l'équation différentielle pour cette fonction :

- $g'(t) = 0$;
- $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$.

On retrouve le second membre de (E), pour tout $t \geq 0$. La fonction constante proposée vérifie donc bien l'équation différentielle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de (E).

Question 1.c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de (E). À cette solution, on ajoute les solutions de l'équation homogène associée $y' + 0,8y = 0$, déterminées à la question précédente. Cette méthode fournit toutes les solutions de (E) : la différence entre deux solutions de (E) vérifie précisément l'équation homogène. Comme aucune condition initiale n'est fixée ici, la constante réelle reste libre.

$$y(t) = 5 + ke^{-0,8t}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale de (E) est $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. La condition initiale permet de déterminer la constante :

1. À $t = 0$, $e^{-0,8\times 0} = 1$, donc $f(0) = 5 + k$.
2. Comme $f(0) = 20$, on obtient $5 + k = 20$, soit $k = 15$.
3. On remplace cette constante dans la solution générale.

La fonction ainsi obtenue vérifie l'équation différentielle et la valeur initiale demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

On utilise l'expression donnée dans la partie B : $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers $+\infty$, le produit $-0,8t$ tend vers $-\infty$. L'exponentielle $e^{-0,8t}$ tend donc vers 0, et le terme $15e^{-0,8t}$ tend aussi vers 0. Le terme constant reste égal à 5. Par somme des limites, la limite de la vitesse est donc égale à 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. En déduire que la courbe C admet une asymptote, puis donner une équation de cette asymptote.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut 5. Une fonction qui admet une limite finie L à l'infini possède une asymptote horizontale d'équation $y = L$. Ici, la courbe C se rapproche donc de la droite horizontale de hauteur 5 lorsque l'abscisse augmente.

- Nature : asymptote horizontale.
- Équation : $y = 5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale à C : $y = 5$.

Question 2. À partir de l'expression donnée de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$ sur l'intervalle : la fonction est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$, et la limite en $+\infty$, établie précédemment, vaut 5. Le tableau de variation est donc :

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0\,;+\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour tout $t \geq 0$, on a $e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse reste ainsi strictement supérieure à 5 m·s⁻¹ à tout instant fini. Elle décroît et se rapproche de 5 m·s⁻¹ lorsque le temps augmente, mais elle n'atteint jamais cette limite. En particulier, elle ne peut pas atteindre 0 : d'après le modèle, le système de freinage ne permet pas au chariot de s'arrêter.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : la vitesse reste positive et tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Question 4.a. Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive la fonction proposée en appliquant la dérivation d'une exponentielle composée :

1. $\dfrac{d}{dt}\left(-18,75e^{-0,8t}\right) = -18,75 \times (-0,8)e^{-0,8t} = 15e^{-0,8t}$.
2. $\dfrac{d}{dt}(5t) = 5$.

Par addition, $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. C'est exactement l'expression de $f(t)$ donnée dans l'énoncé ; F est donc une primitive de f sur $[0\,;+\infty[$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4.b. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre les instants $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance parcourue entre 0 et 1 seconde est l'intégrale de la vitesse sur cet intervalle. Avec la primitive F, le théorème fondamental donne $d = F(1) - F(0)$. Les deux valeurs sont $F(1) = -18,75e^{-0,8} + 5$ et $F(0) = -18,75$. On obtient la valeur exacte ci-dessous, puis son approximation décimale, arrondie au centimètre.

Valeur exacte	Valeur arrondie
$23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m	$15,33$ m

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m $\approx 15,33$ m.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir, parmi les propositions du sujet, le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte ; aucune justification n'est demandée.

Le logiciel donne pour partie polynomiale $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$, soit $20 - 12t + 4,8t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste doit être de la forme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0. Parmi les trois propositions du sujet, seule la troisième reprend à la fois les coefficients affichés et cette forme du reste.

- Réponse exacte : la troisième proposition.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Troisième proposition : $f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

La tangente à la courbe au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)(t - 0)$. D'après la fonction donnée, $f(0) = 15 + 5 = 20$. L'énoncé fournit aussi $f'(t) = -12e^{-0,8t}$, donc $f'(0) = -12$. La tangente passe par $(0\,;\,20)$ et a pour coefficient directeur -12.

On obtient l'équation de la tangente en remplaçant ces deux valeurs.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 12t$.

2. Étude d'un système électrique par transformation de Laplace

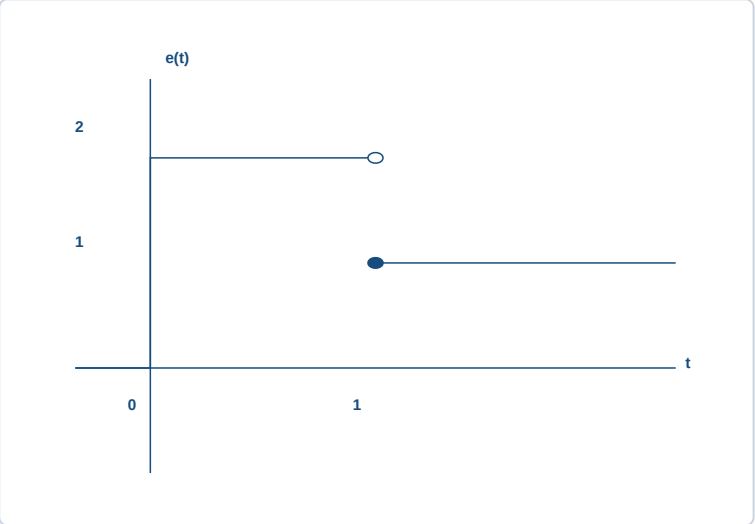
Un système électrique reçoit le signal causal e(t) = 2U(t) - U(t - 1) et produit un signal de sortie s(t), avec une fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). L'exercice demande de représenter le signal d'entrée, d'utiliser les transformations de Laplace pour établir la sortie, puis d'en étudier l'expression, la courbe et la limite.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

La définition de l'échelon donne une valeur nulle avant l'instant zéro. À partir de zéro, le terme $2U(t)$ vaut 2. À $t = 1$, le terme $U(t-1)$ devient égal à 1 : le signal descend alors à 1 et y reste. Les points pleins indiquent les valeurs effectivement prises aux instants de saut, conformément à la convention $U(0) = 1$.

Signal d'entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ si $t < 0$, $e(t) = 2$ si $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée e(t).

On utilise la linéarité de la transformée de Laplace et les deux formules du formulaire : l'échelon unité a pour transformée $1/p$, tandis que l'échelon retardé d'une unité a pour transformée e^{-p}/p. Le facteur 2 devant le premier échelon est conservé. La soustraction correspond au signe négatif dans la définition du signal d'entrée.

$$E(p) = 2\mathcal{L}\{U(t)\} - \mathcal{L}\{U(t-1)\} = \frac{2}{p} - \frac{e^{-p}}{p}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/(p(p + 1))]e^(-p).

La fonction de transfert relie les transformées par $S(p) = H(p)E(p)$. On remplace chacune par son expression déterminée dans l'énoncé et à la question précédente :

$S(p) = \dfrac{1}{p+1}\left(\dfrac{2-e^{-p}}{p}\right) = \dfrac{2-e^{-p}}{p(p+1)}$. En séparant les deux termes du numérateur, on obtient bien la différence demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $S(p) = \dfrac{2}{p(p+1)} - \dfrac{e^{-p}}{p(p+1)}.$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

Pour vérifier l'identité, on met les deux fractions du membre de droite au même dénominateur. Le numérateur obtenu est la différence entre $p+1$ et p, donc il se réduit à 1. Le dénominateur est $p(p+1)$. Cette décomposition en éléments simples servira ensuite à appliquer séparément les transformées inverses.

1. $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1} = \dfrac{p+1-p}{p(p+1)}$.
2. Le numérateur vaut 1, ce qui donne l'égalité annoncée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}.$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e^(-p)/p et de e^(-p)/(p + 1).

Les deux premières transformées inverses proviennent directement du formulaire. Pour les deux dernières, on applique la propriété de retard d'une unité : le signal retardé est nul avant $t = 1$, puis prend la forme de la fonction initiale évaluée en $t - 1$.

- $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p}\right) = U(t).$
- $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p+1}\right) = e^{-t}U(t).$
- $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{e^{-p}}{p}\right) = U(t-1).$
- $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{e^{-p}}{p+1}\right) = e^{-(t-1)}U(t-1).$

✓ RÉPONSE À RETENIR

Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

On remplace chaque terme de $S(p)$ par la décomposition vérifiée à la question 2. Les termes multipliés par e^{-p} correspondent à des fonctions retardées d'une unité. Sur l'intervalle $[0;1[$, ces fonctions retardées sont nulles, car leur échelon vaut zéro. Il ne reste donc que l'inverse du premier terme, multiplié par 2.

$$s(t) = 2\big(U(t) - e^{-t}U(t)\big) = 2(1 - e^{-t}), \text{ pour } 0 \leq t < 1.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. Sachant que s(t) = (e - 2)e^(-t) + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), en donnant sa valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.

On évalue en $t = 1$ l'expression donnée pour $t \geq 1$. Comme $e^{-1} = 1/e$, on simplifie exactement : $(e-2)/e + 1 = 2 - 2/e$. Numériquement, cette valeur est $1{,}264241\ldots$. L'arrondi au dixième est donc $1{,}3$, avec une valeur exacte distincte de son approximation décimale.

$$s(1) = (e-2)e^{-1} + 1 = 2 - \frac{2}{e}.$$

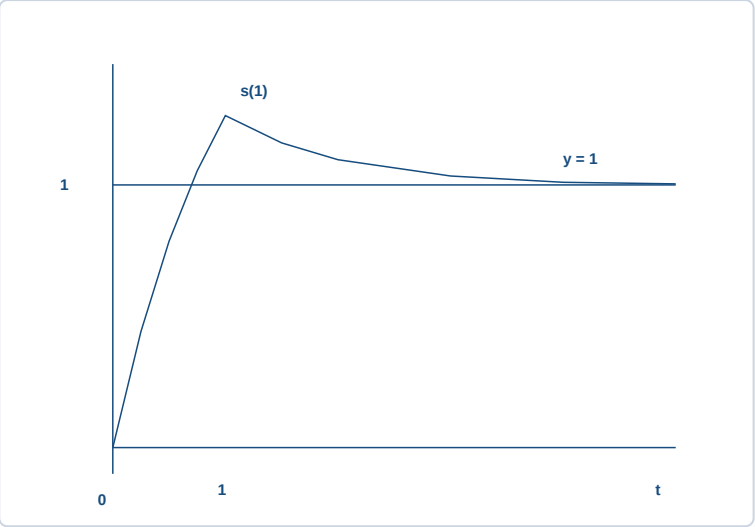
✓ RÉPONSE À RETENIR

$s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1{,}3$.

Question 5.b. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.

La première branche part de $(0;0)$ et croît selon $2(1-e^{-t})$ jusqu'à $t = 1$. La seconde branche part de la même valeur $2 - 2/e$, puis décroît vers 1, puisque $e - 2 > 0$. Le tracé indique le point de raccordement et l'asymptote horizontale. Il représente les deux expressions sur leurs intervalles respectifs.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe passe par $(0;0)$ et $(1;2-2/e)$, puis décroît vers l'asymptote $y=1$.

Question 5.c. Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, l'expression fournie est $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Le coefficient $e-2$ est constant et l'exponentielle e^{-t} tend vers zéro lorsque t tend vers $+\infty$. Le terme supplémentaire disparaît donc dans la limite, laissant uniquement la constante 1.

$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

SYNTHÈSE DE L'ÉPREUVE & RÉFÉRENTIEL • BTS BANQUE

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, groupement B, code 22MATGRB2, d'une durée de deux heures. Les coefficients sont 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et 2 en Électrotechnique. Le sujet étudie le freinage d'un chariot et un système électrique, et évalue la résolution d'équations différentielles, l'analyse de fonctions, l'intégration, le développement limité et les transformations de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, on ajoute à la solution générale de l'équation homogène une solution particulière de l'équation complète.
- Si f(t) tend vers une limite finie L lorsque t tend vers +∞, sa courbe admet l'asymptote horizontale y = L.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse : d = ∫[t_0,t_1] f(t) dt.
- La transformée de Laplace de U(t - a) est e^(-ap)/p ; un retard temporel produit un facteur e^(-ap).

Points de vigilance & attentes du jury

- Après avoir déterminé la solution générale de l'équation différentielle, appliquer la condition initiale f(0) = 20.
- Pour décider si le chariot s'arrête, interpréter la limite de sa vitesse et vérifier si elle tend vers zéro.
- Calculer la distance avec une primitive évaluée aux deux bornes, puis respecter l'arrondi au centimètre.
- Pour le signal retardé, utiliser le facteur e^(-ap) et distinguer les intervalles [0 ; 1[et [1 ; +∞[.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment obtenir la solution générale de l'équation différentielle du freinage ?

Résolvez d'abord l'équation homogène y' + 0,8y = 0, puis ajoutez une solution particulière de l'équation complète. Utilisez ensuite f(0) = 20 pour déterminer la constante et obtenir la fonction vitesse.

Q : Comment interpréter la limite de la vitesse pour savoir si le chariot s'arrête ?

Étudiez la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞. Si elle est strictement positive, la vitesse ne tend pas vers zéro et, selon le modèle de l'exercice, le chariot ne s'arrête pas.

Q : Comment répartir le temps sur cette épreuve de deux heures ?

Le sujet comprend deux exercices de dix points chacun. Une répartition proche d'une heure par exercice est équilibrée ; gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités, les arrondis et les tracés demandés.

Q : Quels documents faut-il rendre et quelles précautions prendre pour les tracés ?

Le document-réponse doit être rendu avec la copie. Tracez le signal d'entrée puis complétez la courbe de sortie en respectant les intervalles définis dans le sujet et en reportant soigneusement les points et valeurs utiles.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts-banque.fr/assets/annales/bts-banque/E2 - Mathématiques/2022/BTS Banque - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Banque : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.