Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS Banque

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Série de Fourier d’une fonction paire périodique (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://bts-banque.fr/assets/annales/bts-banque/E2 - Mathématiques/2023/BTS Banque - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond du tiroir, représenté par M, et le fond du meuble, représenté par O, est modélisée par une fonction f du temps, en centimètres. L’exercice utilise une équation différentielle puis l’étude de cette fonction pour examiner la fermeture, son temps et la position moyenne du tiroir.

Partie A - Résolution d’une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On cherche les racines du polynôme caractéristique. La factorisation donne $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$, car le produit des deux constantes vaut 4 et leur somme vaut 5. Pour annuler ce produit, il faut annuler au moins un facteur. On résout donc séparément $r + 1 = 0$ et $r + 4 = 0$, ce qui fournit les deux valeurs recherchées.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les racines de l’équation caractéristique sont $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$.

Question 1.b. À l’aide du tableau fourni, résoudre l’équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.

L’équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes, déterminées à la question précédente : -1 et -4. D’après le tableau fourni, lorsque les racines sont réelles et distinctes, les solutions de l’équation différentielle sont des combinaisons linéaires des exponentielles correspondantes. Les constantes sont arbitraires, puisque aucune condition initiale n’est imposée dans cette question.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La solution générale est $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la distance initiale de 20 cm et de la vitesse initiale négative de -10 cm·s⁻¹, déduire les valeurs de f(0) et de f'(0).

La fonction f représente la distance OM, en centimètres. À l’instant initial, cette distance vaut 20 cm, ce qui donne directement la valeur de la fonction en zéro. La vitesse de déplacement du point M est la dérivée de cette distance par rapport au temps. L’énoncé précise qu’elle est négative et égale à -10 cm·s⁻¹ à cet instant.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s⁻¹.

Question 2.b. **En admettant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

La distance cherchée est la valeur de la fonction au temps $t = 2$ secondes. On substitue donc 2 à t dans l'expression donnée, en remplaçant chaque exponentielle par sa valeur correspondante : e^{-t} devient e^{-2}, et e^{-4t} devient e^{-8}. L'expression obtenue est exacte et la distance est exprimée en centimètres.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2.c. **Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Le constructeur affirme qu'il est fermé en moins de 4 secondes. Dire s'il a raison et justifier.**

On évalue la distance à l'instant limite annoncé : $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}427$ cm. Cette distance est déjà inférieure au seuil de 0,5 cm. De plus, la fonction est strictement décroissante sur l'intervalle considéré : le seuil a donc été atteint avant l'instant 4 secondes, et non seulement à cet instant.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui. À 4 s, $OM \approx 0{,}427$ cm, donc le tiroir est fermé avant 4 secondes.

Partie B - Étude de fonction

Question 1.a. **En utilisant la limite rappelée pour e⁻ᵘ, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

La fonction est définie par $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, les exposants $-t$ et $-4t$ tendent vers $-\infty$. En appliquant la limite rappelée pour l'exponentielle, chacun des deux termes tend vers zéro. La limite de leur différence est donc également nulle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0.$

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote, puis en donner une équation.**

La fonction tend vers la valeur finie 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Par définition, si une fonction tend vers une limite finie en l'infini, sa courbe représentative admet une asymptote horizontale dont l'ordonnée est cette limite. Ici, la limite vaut zéro ; la droite asymptote coïncide donc avec l'axe des abscisses.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe admet l'asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive séparément les deux termes de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. La dérivée de e^{at} est ae^{at}. Ainsi, le premier terme donne $-\frac{70}{3}e^{-t}$, tandis que le second donne $-\frac{10}{3} \times (-4)e^{-4t} = \frac{40}{3}e^{-4t}$. On additionne ces deux dérivées.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

On sait que $f'(t) < 0$ sur $[0; +\infty[$, donc f est strictement décroissante sur cet intervalle. À l'origine, sa valeur est $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$. Lorsque t tend vers l'infini, $f(t)$ tend vers 0. Ces valeurs et le signe de la dérivée permettent de compléter le tableau suivant.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	–	–
Variation de f	20	$\searrow$ 0

✓ RÉPONSE À RETENIR

La fonction f décroît de 20 à 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne numéro 36, en ajoutant si nécessaire des lignes jusqu'à son arrêt. Indiquer t, la valeur de f(t) arrondie à 10^{-2} et le résultat du test de la condition.

L'algorithme augmente t de 0,1 tant que la distance calculée dépasse 0,5 cm. Pour chaque ligne, on évalue la fonction avec la valeur de t indiquée, puis on teste la condition sur la valeur non arrondie. L'affichage de $f(t)$ est ensuite arrondi au centième, comme demandé dans le tableau.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition** $f(t) > 0{,}5$
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le test devient faux à la ligne 39, lorsque $t = 3{,}9$.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

La boucle se poursuit tant que la distance est strictement supérieure à 0,5 cm. Elle effectue donc encore les tests à 3,6 s, 3,7 s et 3,8 s, car les trois valeurs calculées dépassent le seuil. À 3,9 s, la distance vaut environ 0,47 cm : la condition devient fausse et l'algorithme s'arrête. Cette valeur est inférieure à 4 secondes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

À la fin de l'algorithme, $t = 3{,}9$ s : le tiroir est fermé en moins de 4 s.

Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

Une primitive de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$ est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. On évalue cette primitive aux bornes 0 et 4, puis on multiplie la différence par $\frac{1}{4}$, conformément à la définition de la position moyenne. On obtient bien l'expression demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}.$$

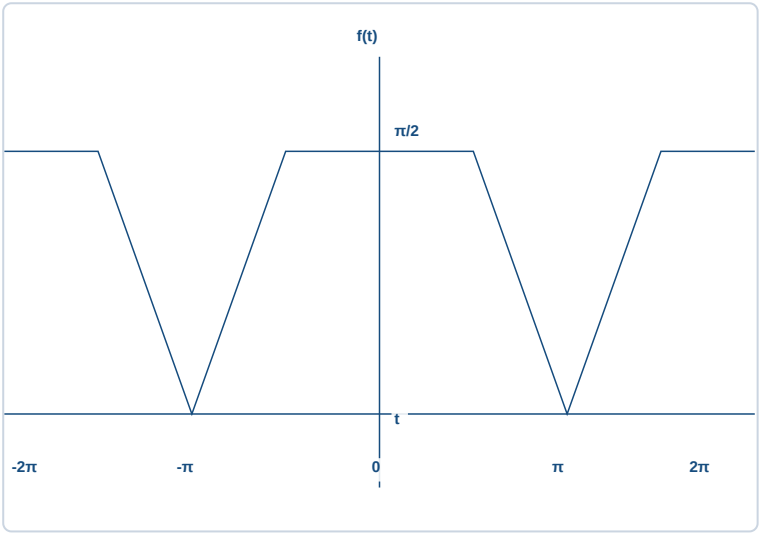
2. Série de Fourier d'une fonction paire périodique

L'exercice étudie une fonction paire de période 2π définie par morceaux sur [0 ; π], ainsi que son développement en série de Fourier. Les questions portent sur son graphique, ses coefficients, une somme partielle et l'estimation de l'erreur sur une approximation de sa valeur efficace au carré.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle [-2π ; 2π].

La fonction est paire et de période 2π. Sur chaque période, elle vaut $\pi/2$ sur un plateau, puis décroît linéairement jusqu'à zéro avant de remonter symétriquement. Sur l'intervalle demandé, les creux sont en $-\pi$ et π, et les plateaux sont centrés sur -2π, 0 et 2π. Le tracé respecte ces répétitions et la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Représentation de f sur [-2π ; 2π]



> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Tracé pair et périodique de période 2π, avec minima nuls en $\pm\pi$.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

Le formulaire donne $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$. La fonction f est paire, et $\sin(n\omega t)$ est impaire : leur produit est impair. Comme ce produit est aussi de période 2π, son intégrale sur $[0;2\pi]$ est égale à son intégrale sur $[-\pi;\pi]$, qui est nulle.

Donc, pour tout $n \geq 1$, $b_n = 0$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $b_n = 0$ pour tout entier $n \geq 1$.

Question 3. **Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.**

La période de f est $T = 2\pi$. D'après le formulaire, la pulsation associée est $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. On remplace la période par sa valeur :

$$\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1.$$

La pulsation s'exprime en radians par unité de temps.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\omega = 1$.

Question 4. **Démontrer que le coefficient constant a_0 est égal à 3π/8.**

Le coefficient constant est la moyenne de la fonction sur une période : $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$. La fonction étant paire, cela devient $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. Sur $[0;\pi/2]$, l'aire vaut $\pi^2/4$. Sur $[\pi/2;\pi]$, l'aire triangulaire vaut $\pi^2/8$. Ainsi, $a_0 = \dfrac{1}{\pi}(\dfrac{\pi^2}{4} + \dfrac{\pi^2}{8})$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_0 = \dfrac{3\pi}{8}$.

Question 5. **Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, a_n = ∫₀^(π/2) cos(nt)dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π - t)cos(nt)dt.**

Pour une fonction paire, le formulaire donne $a_n = \dfrac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$. Ici, $T = 2\pi$ et $\omega = 1$, donc $a_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. On sépare l'intégrale en deux intervalles, puis on utilise les expressions de f définies sur chacun.

1. Sur $[0;\pi/2]$, $f(t) = \pi/2$.
2. Sur $[\pi/2;\pi]$, $f(t) = \pi - t$.

Le premier terme devient l'intégrale indiquée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,dt.$

Question 6. **En admettant que $a_n = 2/(\pi n^2)(\cos(n\pi/2) - \cos(n\pi))$, déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.**

Dans la formule admise, on remplace n successivement par 1, 2 et 3. Les valeurs utiles sont $\cos(\pi/2) = 0$, $\cos(\pi) = -1$, $\cos(2\pi) = 1$, $\cos(3\pi/2) = 0$ et $\cos(3\pi) = -1$. La substitution donne :

Coefficient	Valeur exacte
a_1	$2/\pi$
a_2	$-1/\pi$
a_3	$2/(9\pi)$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$a_1 = \frac{2}{\pi}, \quad a_2 = -\frac{1}{\pi}, \quad a_3 = \frac{2}{9\pi}.$$

Question 7. **En déduire l'expression de $s_3(t)$: $s_3(t) = 3\pi/8 + (2/\pi)\cos(t) - (1/\pi)\cos(2t) + (2/(9\pi))\cos(3t)$.**

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3} a_n \cos(nt)$, puisque les coefficients sinus sont nuls et que $\omega = 1$. En remplaçant le coefficient constant par $3\pi/8$, puis les trois autres coefficients par leurs valeurs trouvées à la question précédente, on obtient :

$$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t).$$

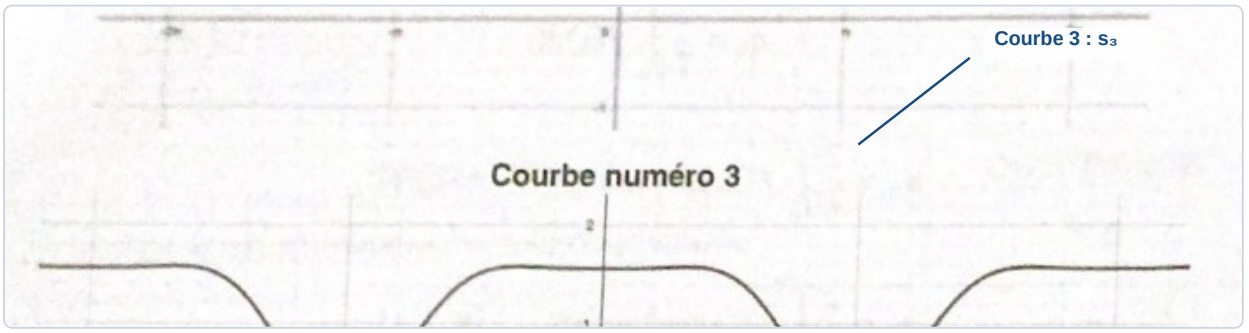
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t).$$

Question 8. **Indiquer sans justification laquelle des trois courbes proposées correspond à la fonction s_3.**

La somme partielle s_3 est paire et périodique de période 2π. Son tracé présente des maxima autour des multiples de 2π et des creux arrondis autour des multiples impairs de π. Parmi les trois courbes du sujet, seule la courbe numéro 3 possède cette allure. L'annotation ci-contre repère la courbe retenue sur le graphique original.

Courbe correspondant à s_3



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Courbe numéro 3.

Question 9.a. **Pour P = (a₀)² + 1/2[(a₁)² + (a₂)² + (a₃)²], donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.**

On utilise $a_0 = 3\pi/8$, $a_1 = 2/\pi$, $a_2 = -1/\pi$ et $a_3 = 2/(9\pi)$. Leur substitution dans l'expression donnée conduit à :

$$P = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2}{9\pi}\right)^2\right].$$

L'évaluation de cette expression, arrondie au dix-millième, donne le résultat ci-dessous.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P \approx 1{,}6437$.

Question 9.b. **Sachant que F² = π²/6 et que P constitue une approximation de F², choisir le pourcentage d'erreur parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Le pourcentage d'erreur est $\frac{|P - F^2|}{F^2} \times 100$. Avec $P \approx 1{,}6437$ et $F^2 = \pi^2/6 \approx 1{,}6449$, il vaut environ $0{,}074\,\%$. Parmi les choix proposés, cette erreur correspond à l'option la plus proche, soit $0{,}1\,\%$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

0,1 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, Session 2023, code 23MATGRB2, durée 2 heures, coefficient 1,5 ou 2 selon la spécialité. Les deux exercices, notés chacun sur 10, modélisent la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et étude de fonction, puis étudient les séries de Fourier d'une fonction paire périodique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, l'équation caractéristique associée est $r^2 + 5r + 4 = 0$.
- La distance du tiroir est $f(t) = (70/3)e^{-t} - (10/3)e^{-4t}$, avec t en secondes et f(t) en centimètres.
- La pulsation d'une fonction de période T est $\omega = 2\pi/T$; pour une fonction paire, les coefficients sinus b_n sont nuls.
- Pour une fonction paire, $a_n = (4/T)\int_0^{(T/2)} f(t)\cos(n\omega t)dt$ pour $n \geq 1$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la distance f(0) de la vitesse f'(0), et respecter les unités ainsi que le signe de la vitesse.
- Dans l'algorithme, respecter le pas de 0,1 et évaluer la condition après chaque actualisation de t.
- Pour Fourier, exploiter la parité et la période en respectant les formules et les bornes d'intégration.
- Pour l'approximation, comparer P à F^2 et sélectionner une seule proposition au QCM.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du tiroir ?

On résout d'abord l'équation caractéristique associée. Ses racines déterminent la forme générale des solutions, puis les conditions initiales permettent de fixer les constantes de cette solution.

Q : Pourquoi les coefficients sinus sont-ils nuls dans l'exercice sur Fourier ?

La fonction est paire et les fonctions sinus sont impaires. Leur produit est donc impair, et son intégrale sur un intervalle symétrique est nulle, ce qui annule les coefficients b_n.

Q : Combien de temps dure l'épreuve et comment est réparti le barème ?

L'épreuve dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points chacun. Le sujet ne précise pas de répartition obligatoire du temps, il faut donc gérer les deux exercices selon leur difficulté et garder du temps pour vérifier.

Q : Quelles consignes de justification faut-il respecter ?

Justifier les résultats lorsque la consigne le demande, notamment pour les démonstrations et la question sur l'affirmation du constructeur. Pour le choix de courbe, une réponse sans justification est demandée, et le QCM précise aussi qu'aucune justification n'est attendue.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts-banque.fr/assets/annales/bts-banque/E2 - Mathématiques/2023/BTS Banque - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Banque : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.