Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS Banque

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRD1** • Durée : **Non indiquée sur les pages fournies**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Refroidissement de l'eau d'un spa (12 questions) **Page 3**

2. Contrôles de qualité en minoterie et étude de clientèle (12 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://bts-banque.fr/assets/annales/bts-banque/E2 - Mathématiques/2023/BTS Banque - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf

1. Refroidissement de l'eau d'un spa

Après l'arrêt du chauffage, la température de l'eau du spa, initialement à 38 °C, évolue alors que la température ambiante reste à 25 °C. Une équation différentielle et un algorithme servent à étudier cette évolution et le déclenchement d'une alarme.

Partie A

Question 1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle homogène y' + 0,05y = 0 sur l'intervalle [0 ; +∞[.

On réécrit l'équation sous la forme $y' = -0{,}05y$. Une fonction exponentielle de la forme Ce^{at} vérifie cette relation lorsque $a = -0{,}05$. La constante multiplicative peut être n'importe quel réel, y compris zéro. On obtient ainsi toutes les solutions sur l'intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer une fonction constante solution particulière de l'équation différentielle y' + 0,05y = 1,25 sur [0 ; +∞[.

Pour une fonction constante $y(t) = k$, la dérivée est nulle. En remplaçant dans l'équation, il faut donc que $0{,}05k = 1{,}25$. On divise par $0{,}05$ pour déterminer la constante, ce qui donne une solution particulière sur tout l'intervalle considéré.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution particulière constante est $y(t) = 25$.

Question 3. Déduire des résultats précédents les solutions de l'équation différentielle y' + 0,05y = 1,25.

À l'équation différentielle avec second membre, on associe la solution particulière constante trouvée à la question précédente. Toutes les solutions s'obtiennent en lui ajoutant une solution de l'équation homogène. Elles dépendent donc d'une constante réelle arbitraire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}05t} + 25$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 4. Montrer que, pour tout réel t de [0 ; +∞[, f(t) = 13e$^{-0,05t}$ + 25.

La fonction f appartient à la famille de solutions trouvée précédemment. La condition initiale donne $f(0) = C + 25 = 38$, donc $C = 38 - 25 = 13$. En remplaçant la constante par cette valeur, on obtient l'expression annoncée pour tout $t \geq 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $t \geq 0$, $f(t) = 13e^{-0{,}05t} + 25$.

Partie B

Question 1. Calculer f(24), arrondie au dixième, puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

On remplace t par 24 dans l'expression de la température : $f(24) = 13e^{-0{,}05\times 24} + 25 \approx 28{,}9155$. L'arrondi au dixième est donc $28{,}9$. Cette valeur représente la température de l'eau du spa 24 heures après la coupure de l'alimentation électrique.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Après 24 heures, la température de l'eau est d'environ $28{,}9\ ^\circ\mathrm{C}$.

Question 2. a). Déterminer une expression de f'(t) pour tout réel t de [0 ; +∞[.

La dérivée de $e^{-0{,}05t}$ est $-0{,}05e^{-0{,}05t}$, par dérivation de l'exponentielle composée. On multiplie ensuite par le coefficient 13. Le terme constant 25 a une dérivée nulle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -0{,}65e^{-0{,}05t}$.

Question 2. b). Déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[et expliquer si ce sens de variation est cohérent avec le contexte de l'exercice.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive. Ainsi, $f'(t) = -0{,}65e^{-0{,}05t} < 0$, donc f est strictement décroissante. C'est cohérent avec la situation : après l'arrêt du chauffage, l'eau perd de la chaleur et sa température baisse.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, conformément au refroidissement de l'eau.

Question 3. a). Déterminer la limite de f lorsque t tend vers +∞.

Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0{,}05t$ tend vers $-\infty$. Par conséquent, $e^{-0{,}05t}$ tend vers zéro. Dans l'expression de $f(t)$, le terme exponentiel disparaît à la limite et seul subsiste le terme constant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 25.$

Question 3. b). Interpréter dans le contexte de l'exercice la valeur de cette limite.

La température de l'eau se rapproche de la limite lorsque le temps écoulé devient très grand. Le modèle indique donc qu'après un temps suffisamment long, l'eau du spa tend vers la température ambiante, qui reste constante pendant l'expérience.

✓ RÉPONSE À RETENIR

À long terme, l'eau du spa se rapproche de $25\ ^\circ\mathrm{C}$, la température ambiante.

Question 4. a). L'alarme sonne lorsque la température devient strictement inférieure à la température programmée. Pour une programmation à 36 °C, déterminer par le calcul le temps écoulé après la coupure avant que l'alarme sonne, puis donner sa valeur exacte et sa valeur arrondie à la minute.

Le seuil est atteint lorsque $13e^{-0{,}05t} + 25 = 36$. Ainsi, $e^{-0{,}05t} = 11/13$, d'où $t = 20\ln(13/11)$ heures. Cette durée vaut environ $200{,}465$ minutes, soit 200 minutes à la minute près. Comme l'alarme sonne lorsque la température devient strictement inférieure à 36 °C, elle retentit juste après cet instant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Seuil atteint après $20\ln(13/11)$ h, soit environ 3 h 20 min. L'alarme sonne juste après.

Question 4. b). Déterminer la valeur numérique affichée par l'algorithme qui initialise H à 0 et T à 38 °C, puis augmente H d'une heure et recalcule T = 13e$^{-0.05H}$ + 25 tant que T ≥ 34.

À $H = 7$, on obtient $T = 13e^{-0{,}05\times 7} + 25 \approx 34{,}161$, donc la condition $T \geq 34$ reste vraie et la boucle continue. À $H = 8$, $T \approx 33{,}714 < 34$: la boucle s'arrête. L'algorithme affiche alors la valeur de H.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme affiche 8.

Question 4. c). Expliquer ce que l'algorithme permet de déterminer dans le contexte de l'exercice.

À chaque passage dans la boucle, l'algorithme ajoute une heure à H et calcule la température correspondante. Il s'arrête dès que cette température est strictement inférieure à 34 °C. Il détermine ainsi le premier nombre entier d'heures pour lequel l'eau passe sous ce seuil.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme détermine qu'il faut 8 heures pour que l'eau passe sous $34\ ^\circ\mathrm{C}$.

2. Contrôles de qualité en minoterie et étude de clientèle

Une minoterie contrôle l'extensibilité de pâtes et le taux d'humidité de livraisons de blé, puis étudie la masse de sacs de farine. L'exercice se termine par l'analyse des choix de clients concernant le test d'une nouvelle farine, La Romaine.

Partie A

Question 1. a). À partir des cinq indices d'extensibilité mesurés, 104, 81, 83, 57 et 55 mm, donner la moyenne de la série et son écart-type arrondi au centième.

La moyenne est $\bar{x} = \frac{104+81+83+57+55}{5} = 76$ mm. La moyenne des carrés des écarts à cette moyenne vaut $\frac{(104-76)^2+(81-76)^2+(83-76)^2+(57-76)^2+(55-76)^2}{5} = 332$. L'écart-type est donc $\sqrt{332} \approx 18,22$ mm.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Moyenne : 76 mm ; écart-type : 18,22 mm.

Question 1. b). En considérant que l'écart-type de la série est σ = 18 mm, vérifier que le technicien n'a pas besoin de tester cinq nouveaux échantillons. Le processus impose ce nouveau test si l'une des valeurs observées est en dehors de l'intervalle [x̄ − 2σ ; x̄ + 2σ].

Avec $\bar{x} = 76$ et $\sigma = 18$, l'intervalle de contrôle est $[76 - 2 \times 18\ ;\ 76 + 2 \times 18] = [40\ ;\ 112]$ mm. Les mesures 104, 81, 83, 57 et 55 mm appartiennent toutes à cet intervalle. Aucune valeur ne déclenche donc le test de cinq nouveaux échantillons.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Aucune mesure ne sort de l'intervalle [40 ; 112] mm : aucun nouveau test n'est nécessaire.

Question 2. Les deux camions contiennent respectivement 29 540 kg de blé à 12,4 % d'humidité et 14 540 kg à 14,1 %. Montrer que le technicien peut autoriser leur déchargement dans un même silo, où le taux d'humidité doit être inférieur à 13 %.

Le taux du mélange se calcule en pondérant les taux par les masses : $\frac{29540 \times 12,4 + 14540 \times 14,1}{29540 + 14540} \approx 12,961\%$. Comme ce résultat est inférieur au seuil de 13 %, les deux chargements peuvent être déversés dans le même silo.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Humidité du mélange : environ 12,961 %. Le déchargement dans le même silo est autorisé.

Partie B

Question 1. La masse X d'un sac suit une loi normale de moyenne 25,2 kg et d'écart-type 0,1 kg. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'un sac choisi au hasard ait une masse inférieure à 25 kg.

On standardise la variable : $Z = \frac{X-25{,}2}{0{,}1}$. Ainsi, $P(X < 25) = P(Z < -2) \approx 0{,}02275$. L'arrondi au millième donne 0,023.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X < 25) \approx 0{,}023$.

Question 2. a). Déterminer un réel h tel que P(25,2 − h ≤ X ≤ 25,2 + h) soit approximativement égal à 0,95, à 10^{-2} près.

Pour une loi normale, l'intervalle centré contenant 95 % des valeurs est approximativement $[\mu - 1{,}96\sigma\ ;\ \mu + 1{,}96\sigma]$. Ici, $h \approx 1{,}96 \times 0{,}1 = 0{,}196$ kg, soit 0,20 kg au centième près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $h \approx 0{,}20$ kg.

Question 2. b). À partir de la représentation graphique fournie, expliquer pourquoi celle-ci ne peut pas représenter la fonction de densité de probabilité de X.

La courbe est très étalée autour de 25,2 kg, avec une largeur de plusieurs kilogrammes. Or, pour une loi normale d'écart-type 0,1 kg, environ 95 % des masses sont entre $25{,}2 - 1{,}96 \times 0{,}1 = 25{,}004$ kg et $25{,}2 + 1{,}96 \times 0{,}1 = 25{,}396$ kg. La courbe devrait donc être beaucoup plus resserrée autour de 25,2 kg.

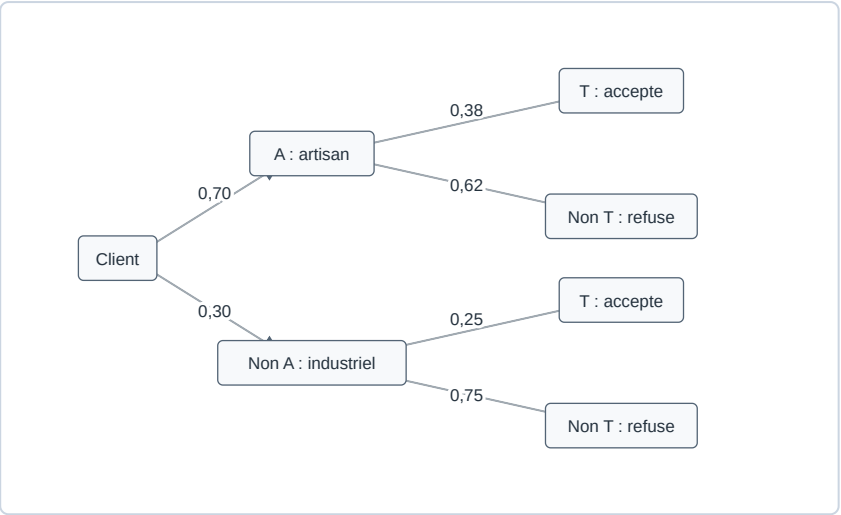
> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe est trop étalée : environ 95 % des masses doivent se trouver entre 25,004 kg et 25,396 kg.

Partie C

Question 1. Représenter la situation par un arbre pondéré, sachant que 70 % des clients sont des artisans boulangers, que 38 % des artisans acceptent de tester La Romaine et que 25 % des boulangers industriels acceptent ce test.

On note A l'événement « artisan boulanger » et T l'événement « accepte de tester ». Les branches complémentaires portent les probabilités $P(\overline{A}) = 0{,}30$, $P(\overline{T} \mid A) = 0{,}62$ et $P(\overline{T} \mid \overline{A}) = 0{,}75$.

Arbre pondéré des clients et du test de La Romaine



Les probabilités issues de chaque nœud ont pour somme 1.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Artisan : 0,70 ; industriel : 0,30. Acceptation : 0,38 chez les artisans et 0,25 chez les industriels.

Question 2. a). Calculer la probabilité que le client choisi soit un artisan boulanger et accepte de tester la farine La Romaine.

Pour que les deux événements se réalisent, le client doit être artisan puis accepter le test. On multiplie donc la probabilité d'être artisan par la probabilité conditionnelle d'accepter : $P(A \cap T) = P(A)P(T \mid A) = 0,70 \times 0,38 = 0,266$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A \cap T) = 0,266$.

Question 2. b). Montrer que la probabilité qu'un client accepte de tester la farine La Romaine est égale à 0,341.

Les artisans et les boulangers industriels forment deux catégories complémentaires. La probabilité d'accepter le test est donc $P(T) = 0,70 \times 0,38 + 0,30 \times 0,25 = 0,266 + 0,075 = 0,341$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T) = 0,341$.

Question 3. Sachant qu'un client a testé la farine La Romaine, calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il soit un artisan boulanger.

La probabilité recherchée est conditionnelle : $P(A \mid T) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}266}{0{,}341} \approx 0{,}780$. Parmi les clients ayant accepté le test, environ 78 % sont donc des artisans boulangers.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A \mid T) \approx 0{,}780$.

Question 4. a). La variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,341. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au plus 60 des 200 clients choisis aient testé la farine La Romaine.

« Au plus 60 » signifie $Y \leq 60$. Pour $Y \sim \mathcal{B}(200 ; 0{,}341)$, on cumule les probabilités de 0 à 60. La probabilité obtenue est environ 0,125, au millième près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(Y \leq 60) \approx 0{,}125$.

Question 4. b). Calculer l'espérance de Y et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Pour une loi binomiale, $E(Y) = np$. Ainsi, $E(Y) = 200 \times 0{,}341 = 68{,}2$. Sur un grand nombre de groupes de 200 clients, le nombre moyen de clients ayant testé La Romaine est de 68,2 par groupe.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(Y) = 68{,}2$ clients.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, code 23MATGRD1, dont la durée et le coefficient ne sont pas indiqués sur les pages fournies. Elle étudie le refroidissement d'un spa, les contrôles de qualité d'une minoterie, le poids des sacs de farine et l'acceptation d'un produit par les clients. Les compétences mobilisées portent sur les équations différentielles, les fonctions, les statistiques et les probabilités.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, la solution générale est la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière.
- Pour deux lots mélangés, le taux global est la moyenne des taux pondérée par les masses correspondantes.
- Une loi normale est symétrique autour de sa moyenne, ce qui facilite le calcul des probabilités d'intervalles centrés.
- Pour Y suivant une loi binomiale B(n ; p), l'espérance est E(Y) = np.

Points de vigilance & attentes du jury

- Utiliser la condition initiale f(0) = 38 pour déterminer la constante de la solution de l'équation différentielle.
- Dans les calculs de mélange, pondérer les taux d'humidité par les masses des deux livraisons.
- Distinguer sur l'arbre les probabilités conditionnelles des probabilités d'intersection.
- Conserver les valeurs exactes pendant les calculs et respecter le degré d'arrondi demandé dans chaque question.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du modèle de refroidissement ?

Résoudre d'abord l'équation homogène, puis chercher une solution particulière constante. La solution générale est leur somme. Enfin, utiliser la condition f(0) = 38 pour déterminer la constante correspondant à la température initiale.

Q : Comment calculer le taux d'humidité du blé mélangé ?

Multiplier la masse de chaque livraison par son taux d'humidité, puis additionner les masses d'eau obtenues. Diviser cette somme par la masse totale des deux livraisons et vérifier que le taux obtenu est inférieur à 13 %.

Q : Comment reconnaître et utiliser la loi binomiale pour les 200 clients ?

Chaque client correspond à un essai avec deux issues, et la probabilité d'accepter le test est 0,341. Les tirages étant assimilés à des tirages avec remise, le nombre Y de clients concernés suit B(200 ; 0,341).

Q : Quelles précautions prendre pour répondre aux questions de probabilités ?

Identifier clairement l'événement demandé et distinguer une intersection d'une probabilité conditionnelle. Sur l'arbre, multiplier les probabilités le long d'une branche pour obtenir une intersection, puis utiliser le conditionnement pour inverser la question.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts-banque.fr/assets/annales/bts-banque/E2 - Mathématiques/2023/BTS Banque - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Banque : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.